DIE LOGIK NICHT GLEICHZEITIG ENTSCHEIDBARER AUSSAGEN

von Ernst SPECKER, Zürich

La logique est d'abord une science naturelle.
F. GONSETH.

Das der Arbeit vorangestellte Motto ist der Untertitel des Kapitels *La physique de l'objet quelconque* aus dem Werk *Les mathématiques et la réalité*; diese Physik erweist sich im wesentlichen als eine Form der klassischen Aussagenlogik, welche so einerseits eine typische Realisation erhält und sich anderseits auf fast selbstverständliche Art des Absolutheitsanspruches entkleidet findet, mit dem sie zeitweise behängt wurde. Die folgenden Ausführungen schliessen sich an diese Betrachtungsweise an und möchten in demselben empirischen Sinn verstanden sein.

Wir gehen aus von einem Bereich B von Aussagen und stellen uns die Aufgabe, die Struktur dieses Bereiches zu untersuchen. Eine solche strukturelle Beschreibung von B ist erst möglich, wenn zwischen den Elementen von B gewisse Relationen oder Operationen definiert sind. Die einfachste Beziehung dürfte wohl die Folgebeziehung « $a \rightarrow b$ » (a und b Aussagen von B) sein, und sie soll den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt werden; wir setzen nicht voraus, dass die Aussage « $a \rightarrow b$ » selbst wieder eine Aussage von B ist, wenn dies auch anderseits nicht ausgeschlossen werden soll. Betrachten wir etwa das folgende Beispiel: Der Bereich B bestehe aus den zehn Aussagen: « Es ist warm », « Es ist kalt », « Es regnet », « Es schneit », « Die Sonne scheint », « Es ist nicht warm », « Es ist nicht kalt », « Es regnet nicht », « Es schneit nicht », « Die Sonne scheint nicht »; für gewisse a, b aus B gilt die Implikation « $a \rightarrow b$ », für gewisse Paare gilt sie sicher nicht, während es für andere zweifelhaft bleiben mag; Beispiele sind etwa: « Wenn es warm ist, so ist es nicht kalt », « Wenn es kalt ist, so schneit es », « Wenn es regnet, so schneit es nicht ». Mit der Problematik, die durch das dritte Beispiel angedeutet wird, dass nämlich die Implikation « $a \rightarrow b$ » für gewisse Paare zweifelhaft sein mag, beschäftigen wir uns im folgenden nicht: für irgend zwei Aussagen a, b von B stehe fest, ob « $a \rightarrow b$ » gilt oder nicht. Besonders hingewiesen sei noch auf das zweite Beispiel « Wenn es kalt ist, so schneit es », von welcher Implikation wir gesagt haben, dass sie nicht gelte. Damit soll natürlich nicht behauptet werden, dass es nicht etwa kalt sein und schneien könne, sondern es soll nur gesagt sein, dass es nicht immer schneit, wenn es kalt ist. Damit ist zum Ausdruck gebracht, dass die Aussagen « Es ist kalt » usw. nicht etwa als Abkürzungen gemeint sind für « Es ist kalt um 11.50 h am 1. Mai 1960 beim Gartentor der Liegenschaft Goldauerstrasse 60 in Zürich » (mit eventuell beigefügten weiteren Präzisierungen, falls solche vergessen sein sollten), sondern in der Allgemeinheit (als « Aussagenformen »), in welcher sie in die Formulierung von Naturgesetzen eingehen.

Auf Grund der Folgebeziehung ist es nun möglich anzugeben, wann eine Aussage c von B als Konjunktion der Aussagen a, b von B anzusprechen ist: Dazu ist erstens nötig, dass die Implikationen « $c \rightarrow a$ » und « $c \rightarrow b$ » gelten (falls a und b, so a; falls a und b, so b) und dass c die folgende Extremalbedingung erfülle: Falls für irgend ein c' in B gilt « $c' \rightarrow a$ » und « $c' \rightarrow b$ », so gilt auch « $c' \rightarrow c$ » (falls gilt c' impliziert a und c' impliziert b, so gilt auch c' impliziert a und b). Es ist nun keineswegs selbstverständlich, dass der Bereich B ein Element enthält, das diese Eigenschaften besitzt; für das oben angeführte Beispiel von zehn Aussagen gibt es zum Beispiel zu keinem Paar verschiedener Elemente eine Konjunktion. Dagegen ist durch dieses Beispiel natürlich nicht ausgeschlossen, dass es zu einem Bereich B stets einen umfassenderen Bereich B' gibt, der diese Abgeschlossenheitseigenschaft besitzt, und mehr als dies ist auch nicht gemeint, wenn gesagt wird, dass es zu zwei beliebigen Aussagen stets eine Konjunktion gebe. Bevor wir uns aber dieser Frage zuwenden, soll untersucht werden, ob die Konjunktion zweier Aussagen eindeutig bestimmt ist. Ist sowohl c_1 als auch c_2 eine Konjunktion von a und b, so gelten nach unserer Festsetzung die Implikationen « $c_1 \rightarrow c_2$ » und « $c_2 \rightarrow c_1$ » (dafür schreiben wir auch «$c_1 \leftrightarrow c_2$» und sagen, c_1 und c_2 seien äquivalent). Äquivalente Aussagen brauchen nicht gleich zu sein (Beispiel: «Es blitzt und donnert», «Es donnert und blitzt»); wird deshalb Eindeutigkeit der Konjunktion (und auch der übrigen Verknüpfungen) gewünscht, so werden statt der Aussagen selbst ihre Äquivalenzklassen betrachtet, und es wird gezeigt, dass die Äquivalenzklasse der Konjunktion zweier Aussagen nur abhängt von den Äquivalenzklassen der verknüpften Aussagen. Im Falle der klassischen Logik wird man so zu den Booleschen Verbänden geführt; ein analoges Vorgehen ist aber auch in wohl allen andern betrachteten Logikkalkülen möglich (wie in der intuitionistischen, der modalen und der mehrwertigen Logik). Die Möglichkeit des Überganges zu Äquivalenzklassen setzt zunächst einmal voraus, dass die Beziehung «$c \leftrightarrow d$» im eigentlichen Sinne eine Äquivalenzrelation sei, das heisst, dass sie die Eigenschaften der Reflexivität («$c \leftrightarrow c$»), der Symmetrie (falls «$c \leftrightarrow d$», so «$d \leftrightarrow c$») und der Transitivität (falls «$c \leftrightarrow d$» und «$d \leftrightarrow e$», so auch «$c \leftrightarrow e$») besitze. Von diesen Eigenschaften ist diejenige der Symmetrie auf Grund der Definition von «$\leftrightarrow$» aus der Implikation «$\rightarrow$» erfüllt; die Reflexivität «$c \leftrightarrow c$» ergibt sich aus dem Bestehen der Implikation «$c \rightarrow c$». Da wir bis jetzt keine Voraussetzung über die Implikation gemacht haben, kann selbstverständlich «$c \rightarrow c$» nicht bewiesen werden, doch wird auch unsere folgende Analyse des Begriffes der Implikation keinen Anlass geben, von «$c \rightarrow c$» abzugehen. Die Transitivität der Beziehung «$\leftrightarrow$» wird üblicherweise aus der Transitivität der Implikation erschlossen: Falls «$c \rightarrow d$» und «$d \rightarrow e$», so auch «$c \rightarrow e$». Es mag vielleicht zunächst den Anschein haben, dass diese Transitivität genau so wie das Bestehen von «$c \rightarrow c$» so eng mit dem Begriff der Implikation verbunden ist, dass es sinnlos wäre, eine nicht transitive Beziehung «Implikation» zu nennen. Dass dem nicht ganz so ist, möge die folgende Geschichte zeigen, die sich allerdings vor langer Zeit und in einem fernen Land abspielt.

An der assyrischen Prophetenschule in Arba'ilu unterrichtete zur Zeit des Königs Asarhaddon ein Weiser aus Ninive. Er war ein hervorragender Vertreter seines Faches (Sonnen- und Mondfinsternisse), der ausser an den Himmelskörpern fast nur an seiner

Tochter Anteil nahm. Sein Lehrerfolg war bescheiden, das Fach galt als trocken und verlangte wohl auch mathematische Vorkenntnisse, die kaum vorhanden waren. Fand er so im Unterricht bei den Schülern nicht das Interesse, das er sich gewünscht hätte, so wurde es ihm auf anderem Gebiet in überreichem Masse zu Teil : Kaum hatte seine Tochter das heiratsfähige Alter erreicht, so wurde er von Schülern und jungen Absolventen mit Heiratsanträgen für sie überhäuft. Und wenn er auch nicht glaubte, dass er sie für immer bei sich behalten wollte, so war sie doch noch viel zu jung und die Freier ihrer auch keineswegs würdig. Und damit sich jeder gleich selbst von seiner Unwürdigkeit überzeugen konnte, versprach er sie demjenigen zur Frau, der eine ihm gestellte Aufgabe im Prophezeien löse. Der Freier wurde vor einen Tisch geführt, auf dem reihweis drei Kästchen standen, und aufgefordert, anzugeben, welche Kästchen einen Edelstein enthalten und welche leer seien. Und wie mancher es auch versuchte, es schien unmöglich, die Aufgabe zu lösen. Nach seiner Prophezeiung wurde nämlich jeder Freier vom Vater aufgefordert, zwei Kästchen zu öffnen, welche er beide als leer oder beide als nicht leer bezeichnet hatte : es stellte sich stets heraus, dass das eine einen Edelstein enthielt und das andere nicht, und zwar lag der Edelstein bald im ersten, bald im zweiten der geöffneten Kästchen. Wie aber sollte es möglich sein, von drei Kästchen weder zwei als leer noch zwei als nicht leer zu bezeichnen? Die Tochter wäre so wohl bis zum Tode ihres Vaters ledig geblieben, hätte sie nicht nach der Prophezeiung eines Prophetensohnes hurtig selbst zwei Kästchen geöffnet, und zwar eines von den als gefüllt und eines von den als leer bezeichneten, welche sich denn auch wirklich als solche erwiesen. Auf den schwachen Protest des Vaters, dass er zwei andere Kästchen geöffnet haben wollte, versuchte sie auch noch das dritte Kästchen zu öffnen, was sich aber als unmöglich erwies, worauf der Vater die nicht widerlegte Prophezeiung brummend als gelungen gelten liess.

Zur logischen Analyse der gestellten Prophezeiungsaufgabe führen wir die folgenden sechs Aussagen A_i, A_i^* $(i = 1, 2, 3)$ ein, wobei A_i bedeute, dass das i-te Kästchen gefüllt, A_i^*, dass es leer sei. Aus den von den Freiern gemachten Versuchen ergibt sich, dass im Bereich dieser Aussagen die folgenden Implikationen gelten: $A_i \to A_j^*$, $A_i^* \to A_j$ (für jedes Paar i, j verschiedener der Zahlen 1, 2, 3); auch die Implikationen $A_i \to A_i$ und $A_i^* \to A_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) sind selbstverständlich erfüllt. Es gelten somit die Implikationen $A_1 \to A_2^*$, $A_2^* \to A_3$, während $A_1 \to A_3$ nicht gilt, sondern vielmehr $A_1 \to A_3^*$. Es ist klar, dass von diesen drei Implikationen nur darum keine widerlegt werden kann, weil es unmöglich ist, alle drei Kästchen zu öffnen. Wir haben damit eine Voraussetzung gefunden, ohne welche der Schluss von den Implikationen « $a \to b$ », « $b \to c$ » auf die Implikation « $a \to c$ » nicht ohne weiteres möglich ist: Die Aussagen a, b, c müssen alle drei zusammen nachprüfbar sein. (Die Implikation « $a \to$ b » soll natürlich stets so aufgefasst werden, dass a und b zusammen nachprüfbar sind und dass stets, wenn dies getan wird, mit a auch b erfüllt ist.)

Die Schwierigkeiten, die durch Aussagen entstehen, welche nicht zusammen entscheidbar sind, treten besonders deutlich hervor bei Aussagen über ein quantenmechanisches System. Im Anschluss an die dort übliche Terminologie wollen wir solche Gesamtheiten von Aussagen als nicht gleichzeitig entscheidbar bezeichnen; die Logik der Quantenmechanik ist zuerst von Birkhoff und von Neumann in [1] untersucht worden. Auf ihre Ergebnisse soll zurückgekommen werden. In einem gewissen Sinne gehören aber auch die scholastischen Spekulationen über die « Infuturabilien » hieher, das heisst die Frage, ob sich die göttliche Allwissenheit auch auf Ereignisse erstrecke, die eingetreten wären, falls etwas geschehen wäre, was nicht geschehen ist. (Vgl. hiezu etwa [3], Bd. 3, S. 363.)

Falls wir somit in Betracht ziehen, dass nicht alle Gesamtheiten von Aussagen gleichzeitig entscheidbar sind, gehört zur Beschreibung der Struktur einer Gesamtheit B von Aussagen neben der Implikation auch die Angabe der Menge Γ derjenigen Teilgesamtheiten von B, welche gleichzeitig entscheidbar sind. Falls für zwei Elemente a, b aus B gilt « $a \to b$ », so sei (a, b) in Γ. Da wir insbesondere für jedes a annehmen, dass « $a \to a$ », so ist (a) in Γ, das heisst, B enthält keine unentscheidbaren Aussagen. Ferner setzen wir nun voraus, dass die Implikation transitiv ist und dass somit B unter « $\leftrightarrow$ » in Klassen äquivalenter Aussagen zerfällt. Um aber von B zur Gesamtheit B' der Äquivalenzklassen übergehen zu können, brauchen wir die weitere Voraussetzung, dass die Menge Γ mit der Klasseneinteilung verträglich ist, das heisst zum Beispiel, dass falls (a, b) in Γ und « $a \leftrightarrow a'$ » auch gilt (a', b) in Γ. Dies wollen wir nun annehmen und erhalten dann eine Gesamtheit B' mit einer Relation « $\rightarrow$ », welche B' teilweise ordnet, sowie eine Menge Γ' von Teilmengen von B'; Γ' enthält alle Einermengen, mit jeder Menge ihre Teilmengen und falls « $a \rightarrow b$ » die Menge (a, b). Birkhoff und von Neumann haben gezeigt, dass die Menge B' die auf diese Art der Aussagenmenge B über ein quantenmechanisches System zugeordnet ist, isomorph ist der Gesamtheit der linearen abgeschlossenen Teilräume eines komplexen Hilbertschen Raumes (welcher in Spezialfällen ein unitärer Raum sein kann); die Implikation entspricht der Relation des Enthaltenseins. Einer Gesamtheit C von Teilräumen entspricht genau dann eine Gesamtheit aus Γ', wenn es eine unitäre Basis des Raumes gibt, welche für jeden Teilraum von C eine Basis enthält. Es kann gezeigt werden, dass dies schon dann der Fall ist, wenn es zu je zwei Räumen aus C eine solche Basis gibt; diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Teilräume im Sinne der Elementargeometrie orthogonal sind, das heisst, wenn das totalorthogonale Komplement des Durchschnittes die Teilräume in totalorthogonalen Räumen schneidet. Eine Gesamtheit von Aussagen über ein quantenmechanisches System ist somit genau dann gleichzeitig entscheidbar, wenn je zwei Aussagen der Gesamtheit es sind. Weiter kann leicht gezeigt werden, dass jede solche Gesamtheit von Aussagen in einem Booleschen Verband enthalten ist, das heisst, dass für sie die klassische Logik gilt. (Eine entsprechende Voraussetzung erscheint auch für eine allgemeine Theorie als natürlich.) Es ist so insbesondere jeder Aussage a eine Negation $\neg a$ zugeordnet; $\neg a$ ist mit b genau dann gleichzeitig entscheidbar, wenn a es mit b ist. Zwei gleichzeitig entscheidbaren Aussagen a, b ist eine Konjunktion und eine Disjunktion zugeordnet, und alle diese Aussagen sind gleichzeitig entscheidbar. Auf Grund der oben angeführten Charakterisierung könnte auch nicht gleichzeitig entscheidbaren Aussagen eine Konjunktion und analog auch eine Disjunktion zugeordnet werden; in der Gesamtheit der Teilräume des Hilbertraumes entsprechen diese Operationen dem Durchschnitt und dem aufgespannten Teilraum. Im Gegensatz zur Arbeit von Birkhoff und von Neumann soll darauf hier aber verzichtet werden, da es für die folgende Problemstellung wesentlich ist, dass die Operationen nur für gleichzeitig entscheidbare Aussagen definiert sind. Wir wollen uns nämlich der Frage zuwenden, ob es möglich ist, die Gesamtheit der (abgeschlossenen) Teilräume eines Hilbertraumes so in einen Booleschen Verband einzubetten, dass die Negation, sowie Konjunktion und Disjunktion soweit sie definiert sind (das heisst für orthogonale Teilräume) ihre Bedeutung beibehalten. Die Frage lässt sich auch anschaulicher folgendermassen formulieren: Kann die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems durch Einführung von zusätzlichen — fiktiven — Aussagen so erweitert werden, dass im erweiterten Bereich die klassische Aussagenlogik gilt (wobei natürlich für gleichzeitig entscheidbare Aussagen Negation, Konjunktion und Disjunktion ihre Bedeutung beibehalten sollen)?

Die Antwort auf diese Frage ist negativ, ausser im Fall von Hilbertschen (d. h. unitären) Räumen der Dimension 1 und 2. Im Falle der Dimension 1 ist der Verband der Teilräume der Boolesche Verband von zwei Elementen. Im Fall der Dimension 2 lässt sich der Verband der Teilräume folgendermassen beschreiben: Es gibt Teilräume H (ganzer Raum), O (Raum aus Nullvektor) und A_a, B_a (wobei a eine Menge der Mächtigkeit des Kontinuums durchläuft); H und O sind zu allen Teilräumen orthogonal, A_a und B_a genau zu H, O, A_a und B_a. Das Komplement (die Negation) von A_a ist B_a und umgekehrt, die Negation von H ist O und umgekehrt. Die Konjunktion von A_a und B_a ist O, ihre Disjunktion ist H; H und O sind Eins- und Nullelement des «teilweisen Verbandes»: $O \smile C = C$, $O \frown C = O$, $H \smile C = H$, $H \frown C = C$ (C beliebiger Teilraum). Es ist leicht zu sehen, dass diese Struktur in einen Booleschen Verband eingebettet werden kann. Dass eine solche Einbettung von der Dimension 3 an nicht mehr möglich ist, folgt daraus, dass sie für dreidimensionale Räume nicht möglich ist. Der Anschaulichkeit halber wollen wir uns dabei auf den im unitären Raum enthaltenen reellen orthogonalen Raum beschränken, für welchen die Einbettungsaufgabe dann folgendermassen lautet: Die Gesamtheit der linearen Teilräume eines dreidimensionalen orthogonalen Vektorraumes ist so eineindeutig in einen Booleschen

Verband abzubilden, dass für beliebige orthogonale Teilräume a, b gilt $f(a \frown b) = f(a) \frown f(b)$, $f(a \smile b) = f(a) \smile f(b)$ und dass das Bild des Nullraumes das Nullelement, das Bild des ganzen Raumes das Einselement des Booleschen Verbandes ist. Da jeder Boolesche Verband homomorph auf den Booleschen Verband von zwei Elementen abgebildet werden kann, ergibt sich aus der Lösung der Einbettungsaufgabe die Lösung der folgenden Prophezeiungsaufgabe: Es ist jedem linearen Teilraum eines dreidimensionalen orthogonalen Vektorraumes einer der Werte w (ahr), f (alsch) so zuzuordnen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Dem ganzen Raum ist w, dem Nullraum f zugeordnet; sind a und b orthogonale Teilräume, so ist ihrem Durchschnitt $a \frown b$ genau dann der Wert w zugeordnet, wenn beiden der Wert w zugeordnet ist, und es ist dem von ihnen aufgespannten Teilraum $a \smile b$ genau dann der Wert w zugeordnet, wenn mindestens einem der Teilräume a, b der Wert w zugeordnet ist.

Ein elementargeometrisches Argument zeigt, dass eine solche Zuordnung unmöglich ist, und dass daher über ein quantenmechanisches System (von Ausnahmefällen abgesehen) keine konsistenten Prophezeiungen möglich sind.

Literaturverzeichnis

[1] Birkhoff G. und J. v. Neumann, The logic of quantum mechanics, Annals of Math. 37 (1936), 823-843.

[2] Gonseth F., Les mathématiques et la réalité (Félix Alcan, Paris 1936).

[3] Solana M., Historia de la filosofía española (Asociación española para el progreso de las ciencias, Madrid 1941).